ÉNONCÉ

X VA réelle, φ_X sa fonction caract.

1. A) si X admet mom d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, φ_X est C^n et $\forall k \leq n$,

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX})$

B) si φ_X est $2n$ fois dériv en 0, alors X admet un mom. d'ordre $2n$.

2. Th (central limite) (X_n) iid admettant un mom. d'ordre 2.

$\mu = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

↳ $\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$.

3. Appli : $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$.

LEÇONS.

218 : **1, 2**

261 : **1, 2.**

262 : **1. A), 3.**

266 : **1. A), 3.**

RÉFS.

1. [OU] Ouvrard p. 205
2. [W] Walter Appel p. ??
3. [W] Walter Appel p. 497

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. th. de Paul Lévy.
2. $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \iff F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ tq F_X continue en t
3. Lemme de Fatou
4. th. dériv. sous le signe intégrale

DÉMO

: à l'oral.

: écrit au tableau.

: pour comprendre.

X VA.

1 A) <u>LEM</u> : X admet mom d'ordre $n \Rightarrow \varphi_X$ n fois dérivable. et $\varphi_X^{(k)} = \mathbb{E}\left((iX)^k e^{itX}\right)$

<u>PREUVE</u>

. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \int_\Omega \underbrace{e^{itX(\omega)}}_{\psi(t,\omega)} dP$

Car borné par 1.

. $\forall \omega \in \Omega$, $\psi(\cdot,\omega)$ est C^∞, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi(t,\cdot) \in L^1(\Omega)$

. $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$, $\partial_t^k e^{itX(\omega)} = (iX(\omega))^k e^{itX(\omega)}$

$$|\partial_t^k e^{itX(\omega)}| \le \underbrace{|X(\omega)|}_{\in L^1(\Omega)}$$

Par théo dériv ss signe fale, on a le rés.

1 B) <u>RÉCIPROQUE</u> :

Par récu sur n

$\mathcal{H}(n)$: " si φ_X est 2n fois dériv en 0, $\mathbb{E}(|X|^{2n}) < +\infty$ " $n \in \mathbb{N}^*$.

(I) $n=0$ $\quad \mathbb{E}(|X|^0) = \mathbb{E}(1) = 1$: $\mathcal{H}(0)$ vraie.

(H) Sq $\mathcal{H}(n)$ vraie, $n \in \mathbb{N}^*$.

Sq φ_X est $2(n+1)$ fois dérivable.

on veut use HR : on regarde $\varphi_X^{(2n)}$ qui est alors 2 fois dérivable.

On va faire un DL à l'ordre 2 en 0 : par A), on va réussir faire lien avec moments

Pour t proche de 0.

$$\varphi_X^{(2n)}(t) = \varphi_X^{(2n)}(0) + t\,\varphi_X^{(2n+1)}(0) + \varphi_X^{(2n+2)}(0)\frac{t^2}{2} \underset{t\to0}{+o(t^2)}$$

$$\varphi_X^{(2n)}(-t) = \varphi_X^{(2n)}(0) - t\,\varphi_X^{(2n+1)}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X^{(2n+2)}(0) \underset{t\to0}{+o(t^2)}$$

On combine les 2 infos et on isole la dérivée d'intérêt.

$$\text{D'où } \varphi_X^{(2n+2)}(0) \underset{t\to0}{+o(1)} = \frac{\varphi_X^{(2n)}(t) + \varphi_X^{(2n)}(-t) - 2\varphi_X^{(2n)}(0)}{t^2}$$

Par HR et (A), on relie avec les moments

Par $\mathcal{H}(n)$ et (1)

$$= \frac{1}{t^2}\mathbb{E}\left((-1)^n X^{2n} e^{itX} + (-1)^n X^{2n} e^{-itX} - 2(-1)^n X^{2n}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left((-1)^n X^{2n}\, 2\left(\frac{\cos(tX) - 1}{t^2}\right)\right)$$

$$\text{or, } 2X^{2n}\left(\frac{\cos(tX)-1}{t^2}\right) = 2X^{2n}\left(\frac{1 - \frac{t^2X^2}{2} - 1 + o(t^2)}{t^2}\right) = -X^{2n+2} \underset{t\to0}{+o(1)}$$

On a une lim à l'intérieur de $\mathbb{E}$, une à l'ext.
On voudrait les relier : il faut intervertir lim et $\mathbb{E}$.

Donc, $\mathbb{E}(X^{2n+2}) = \mathbb{E}\left(\liminf_{u\to+\infty}\left(2X^{2n}\overbrace{\left(\frac{1-\cos(tuX)}{tu^2}\right)}^{\geq 0}\right)\right)$

$\leq \liminf_{u\to+\infty} \mathbb{E}\left(2X^{2n}\left(\frac{1-\cos(tuX)}{tu^2}\right)\right)$

$= (-1)^{n+1}\varphi_X^{(2n+2)}(0)$ fini

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

2. TCL

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de VA iid tq $\underbrace{\mathbb{E}(X_1)=0 \text{ et } Var(X_1)=\mathbb{E}(X_1^2)=1}_{\text{on peut sq quitte à centrer, réduire.}}$

$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Par th de Lévy, pr mq cv en loi, il faut mq φ_{X_n} CVS

BUT : Mq $\varphi_{S_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

On regarde $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$:

Soit $t\in\mathbb{R}$.

$\varphi_{S_n}(t) \underset{\text{prop Fc}}{=} \varphi_{\Sigma X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \underset{\text{indépendance}}{=} \prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \overset{\text{même loi}}{=} \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

On va faire un DL :

or, X_1 admet un moment d'ordre 2. Donc par (1), $\forall t\in\mathbb{R}$:

$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + i\underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{=0 \text{ centré}}\frac{t}{\sqrt{n}} + i^2\underbrace{\mathbb{E}(X_1^2)}_{=\sigma^2=1}\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ car centré

$= 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On prend la déter principale du log

$\forall |z|<1$, $-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$

En particulier, pour $n\to+\infty$, $\log\left(1-\frac{t^2}{2n}\right) = -\frac{t^2}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

$\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{t^2}{2}+\underset{n\to\infty}{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Donc $S_n \xrightarrow{\text{Loi}} Z$ ■

AUTRE VERSION

$$\left| \varphi_{S_n}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \varphi_{X_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \left(e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^n \right|$$

$$= \left| \varphi_{X_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varphi_{X_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^k \left(e^{-\frac{t^2}{2n}}\right)^{n-1-k} \right|}_{\leq n.}$$

et $n \left| \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right| = n \left| 1 - \frac{t^2}{2n} - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right| = |o(1)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$

3. Appli : $\frac{e^n}{2} \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$

cette somme fait penser à une loi de poisson à un facteur exp près.

On va utiliser le lemme suiv, démo après.

Lem : $X_1, \dots X_n$ indé, $X_i \sim P(\lambda_i)$ alors $X_1 + \dots + X_n \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 \dots + \lambda_n)$.

On va interpréter cette somme en lien avec une VA.

• Soit $X_1, \dots X_n$ VA iid $X_i \sim P(1)$. Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n)$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = e^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \right)$$

$$= e^n \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k \right)$$

$\sum \mathbb{P} = \mathbb{P}(\leq)$.

$$= e^n \, \mathbb{P}\left(n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - 1 \right) \leq 0 \right)$$

$$= e^n \, \mathbb{P}(Z_n \leq 0) \quad \text{avec } Z_n := \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - 1 \right)$$

$$= e^n F_{Z_n}(0)$$

Convergence de F_{Z_n}

• On a un théo de CV pr les fdr : need CV en loi.

Or, on a une forme bien particulière pr Z_n.

loi poisson : admet mom d'ordre 2 et on a :

$\mathbb{E}(X_1) = 1 \quad \leftarrow \lambda$

$Var(X_1) = 1 \quad \leftarrow \lambda^2 \quad$ (c'est >0)

par le TCL, $Z_n := \sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - 1 \right) \xrightarrow{\text{loi}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Or $F_Z(0) = \int_{-\infty}^{0} \overbrace{f_Z(x)}^{\text{densité de } Z} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \overbrace{f_Z(x) dx}^{=1 \text{ car densité}} = \frac{1}{2}$ par parité en particulier, cont en 0.

Donc $F_{Z_n}(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_Z(0)$ (par CV en loi).

Finalement, $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$.

(selon le temps)

PREUVE DU LEMME :

On fait le cas $n=2$, le reste se déduit par récu.

Soit $X \sim P(\alpha)$, $Y \sim P(\beta)$. $X \perp\!\!\!\perp Y$

On veut caract 1 loi d'1 VA à val ds $\mathbb{N}$, outil privilégié = fonct géné.

$\forall |z| < 1 \quad \rightarrow$ fonct géné de ray CV ≥ 1.

$$G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{(\alpha z)^n}{n!} = e^{-\alpha} e^{\alpha z} = e^{\alpha(1-z)}.$$

Et $G_{X+Y}(z) \underset{\text{indé}}{=} G_X(z) G_Y(z) = e^{(\alpha+\beta)(1-z)}$.

Ĉ la fonct géné caract la loi, $X+Y \sim P(\alpha+\beta)$.